



TITLE:

Some basic results about probabilistic pushdown automata

AUTHOR(S):

陳, 致中; 笠井, 琢美

CITATION:

陳, 致中 ...[et al]. Some basic results about probabilistic pushdown automata. 数理解析研究所講究録 1988, 666: 81-90

ISSUE DATE:

1988-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100683>

RIGHT:

Some basic results about probabilistic pushdown automata

陳 致中 (Zhi-Zhong Chen)

笠井琢美 (Takumi Kasai)

Abstract: We introduce the concept "probability" into pushdown automata(PDA). By assigning a cut-point $0 < \lambda < 1$ to a probabilistic pushdown automaton (PPDA)M, the language $L(M)$ accepted by M with cut-point λ is defined. Moreover, according to the properties of errors, PPDA's are classified into unrestricted PPDA's(2-sided error PPDA's), RPDA's(1-sided error PPDA's), and BPDA's(bounded error PPDA's). Some relations among the classes of languages accepted by PDA's, PPDA's, RPDA's, and BPDA's are obtained. It is shown that the class of languages accepted by PPDA's or BPDA's is independent of cut-points. It is also shown that there is an infinite hierarchy of the classes of languages accepted by RPDA's with different cut-points.

1. はじめに:

近年種々の効率よい確率アルゴリズムが開発され^{(1) (6) (11) (12) (14) (16)}, また確率アルゴリズムの理論研究も盛んである^{(2) (13) (15) (18) (19) (20)}。確率アルゴリズムを実行する媒体としての計算モデルには, 確率チューリング機械(PTMと略す)⁽⁵⁾と確率有限オートマトン(PFAと略す)^{(10) (17)}がある。プッシュダウン・オートマトン(PDAと略す)⁽⁷⁾がチューリング機械(TMと略す)⁽⁷⁾, 有限オートマトン(FAと略す)⁽⁷⁾と並び古くから研究されてきた。よって, PDAに確率を導入し, 確率プッシュダウン・オートマトン(PPDAと略す)を考えるのは非常に自然である。

また, 切断点(cutpoint, threshold)という概念を導入することにより, 任意の $\lambda, 0 < \lambda < 1$ に対し, 切断点 λ を持つPPDAによって受理される言語を定義する。

Gillは1977年に確率チューリング機械(PTMと略す)を定義し⁽⁵⁾, 受理するための条件である誤差の性質により, PTMを両側誤差(2-sided error)PTM, 片側誤差(1-sided error)PTM, 有界誤差(bounded error)PTMなどに分類した (Gillの論文⁽⁵⁾の用語法と多少異なるが, 本質的なものではない)。ここで誤差は, 受理すべきものを受理しない誤差と, 受理すべきでないものを受理してしまう誤差に分けられる。通常確率アルゴリズムと言った場合は, この2種類の誤差が起こりうる両側誤差アルゴリズムを指す。片側誤差アルゴリズムは, 受理すべきでないものを受理する確率が0であるアルゴリズムで, 最近ではよくランダム・アルゴリズムと呼ばれている。有界誤差とは2種類の誤差が共にある定数 $c, 0 < c < 1/2$ でおさえられるものを言う。本稿では, これらの概念をPPDAに導入し, 両側誤差PPDA(単にPPDAと略す), 片側誤差PPDA(RPDAと略す), 有界誤差PPDA(BPDAと略す)について考察する。また, これらのPPDAによって受理される言語のクラス, 決定性文脈自由言語⁽⁷⁾のクラス, 文脈自由言語⁽⁷⁾のクラスの間関係を考察する。

2. 定義と記法

[定義2.1] 確率プッシュダウン・オートマトン (PPDA)とは $M = (Q, \Sigma, \Gamma, P, q_0, F)$ のことを言う。ここで, (1) Q は状態の集合, (2) Σ は入力アルファベット, (3) Γ はスタック・アルファベットであり, Γ は特別な文字 Z_0 を含む。 Z_0 は常にスタックの底にあり, ほかの所に現れない。(4) $q_0 \in Q$, q_0 は初期状態と呼ばれる。(5) $F \subset Q$, F の元は受理状態と呼ばれる。(6) p は $X \times Y$ から $[0, 1]$ への関数である。ただし, $X = Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma$, $Y = Q \times \Gamma^*$, ε は空語である。 $[0, 1]$ は $0 \leq r \leq 1$ を満たす r 全体からなる集合である。さらに, 任意の $q \in Q, a \in \Sigma, A \in \Gamma$ に対して $\sum_{y \in Y} P(y | q, a, A) + \sum_{y \in Y} P(y | q, \varepsilon, A) \leq 1$; かつ任意の $q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma$ に対して $\{y \in Y : P(y | q, a, A) > 0\}$ が有限である。 P を遷移関数と言う。

[定義2.2] $M = (Q, \Sigma, \Gamma, P, q_0, F)$ を与えられたPPDAとする。 $C = Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ とする。 C の元を様相と言う。様相 (q, x, β) は, 現在の状態が q で, まだ未処理の入力の部分が x で, スタックの内容が β であることを表す。入力 η が与えられたとする。様相 (q_0, η, Z_0) を初期様相, 様相 (q_f, ε, Z_0) を受理様相と言う。ただし, $q_f \in F$ 。

【定義2.3】 $M=(Q, \Sigma, \Gamma, P, q_0, F)$ をPPDAとし, η を M への入力とする。様相 C_1, C_2 に対して, $P^M(C_2 \mid C_1)$ を次で定義する。 $C_1=(q, ax, A\beta)$ かつ $C_2=(q', x, \alpha\beta)$ かつ $a \neq \varepsilon$ の時, $P^M(C_2 \mid C_1)=P(q', \alpha \mid q, a, A)$; $C_1=(q, x, A\beta)$ かつ $C_2=(q', x, \alpha\beta)$ の時, $P^M(C_2 \mid C_1)=P(q', \alpha \mid q, \varepsilon, A)$; その他の時, $P^M(C_2 \mid C_1)=0$ 。様相の列 $C: C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$ は C_0 が初期様相で, かつ $0 \leq i \leq m-1$ に対し, $P^M(C_{i+1} \mid C_i) > 0$ を満たすとき, 入力 η に対する M の計算と言い, m をこの計算の長さと言う。この計算の確率 $P^M(C)$ を $P^M(C_1 \mid C_0), P^M(C_2 \mid C_1), \dots, P^M(C_m \mid C_{m-1})$ の積と定義する。更に, C_m が受理様相であるとき, この計算を受理計算と呼ぶ。語 η が M に受理される確率 $\text{ACCEPT}^M(\eta)$ を入力 η に対するすべての受理計算の確率の和と定義する。

任意の $\eta \in \Sigma^*$ に対して, $0 \leq \text{ACCEPT}^M(\eta) \leq 1$ となることに注意する。

【定義2.4】 $0 < \lambda < 1$ とする。次の二条件が満たされるなら, M は言語 L を受理する両側誤差PPDAであると言う。(1) $\eta \in L$ ならば, $\text{ACCEPT}^M(\eta) > \lambda$; (2) $\eta \notin L$ ならば, $\text{ACCEPT}^M(\eta) \leq \lambda$ 。

【定義2.5】 $0 < \lambda < 1$ とする。もし, Σ^* の任意の元 η に対し, 次の二つの条件が満たされるならば, M は言語 L を受理する切断点 λ を持つ片側誤差PPDA, 即ちRPDAであると言う。(1) η が L に属するなら, $\text{ACCEPT}^M(\eta) > \lambda$; (2) η が L に属しなければ, $\text{ACCEPT}^M(\eta) = 0$ 。

【定義2.6】 $0 < \lambda < 1$ とする。もし, $0 < c < \lambda$ かつ $c < 1 - \lambda$ を満たす c が存在し, Σ^* の任意の元 η に対して次の二つの条件が満たされれば, M は言語 L を受理する間隔 c , 切断点 λ を持つ有界誤差PPDA, 即ちBPDAであると言う。(1) η が L に属するなら, $\text{ACCEPT}^M(\eta) > \lambda + c$; (2) η が L に属さないなら, $\text{ACCEPT}^M(\eta) \leq \lambda - c$ 。

【記法】 決定性プッシュダウン・オートマトンを $\text{DPDA}^{(7)}$; 切断点 λ を持つPPDAを λ -PPDA, 切断点 λ を持つRPDAを λ -RPDA, 切断点 λ を持つBPDAを λ -BPDAと書く。DPDAによって受理される言語のクラスをDCFL, NPDAによって受理される言語のクラスをCFL, λ -PPDAによって受理される言語のクラスをPPDA(λ), λ -RPDAによって受理される言語のクラスをRPDA(λ), λ -BPDAによって受理される言語のクラスをBPDA(λ)と書く。また, 便宜上, M がPPDAであるかBPDAであるかRPDAであるかに関わらず, M によって受理される言語を $L(M)$ で表す。

3. DCFL, CFL, PPDA(λ), BPDA(λ), RPDA(λ)間の関係

【定理3.1】 任意の $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ に対して, $PPDA(\lambda_1) = PPDA(\lambda_2)$, $BPDA(\lambda_1) = BPDA(\lambda_2)$ 。

(証明) ほとんど自明である。 ■

定理3.1より, $PPDAL = \bigcup_{0 < \lambda < 1} PPDA(\lambda)$ とすれば, $0 < \lambda < 1$ を満たす任意の常数 λ に対して, $PPDAL =$

$PPDA(\lambda)$ 。 $BPDAL = \bigcup_{0 < \lambda < 1} BPDA(\lambda)$ とすれば, $0 < \lambda < 1$ を満たす任意の常数 λ に対して, $BPDAL = BPDA(\lambda)$ 。

したがって, 以下では, $PPDA(\lambda)$ と $BPDA(\lambda)$ のかわりに, $PPDAL$ と $BPDAL$ と書く。

【定理3.2】 $CFL \subseteq PPDAL$ 。

(証明) Chen と Hu の結果よりほとんど明か。 ■

【補題3.1】 $L_1 \in RPDA(\lambda_1)$, $L_2 \in RPDA(\lambda_2)$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 1$ ならば, $L_1 \cap L_2 \in BPDAL$ 。

(証明) ほとんど自明。 ■

【定理3.3】 $L \notin CFL$ かつ $L \in BPDAL$ となる言語 L が存在する。

(証明) 言語 $L_1 = \{a^i b^j c^k : i \geq 1, i = j, k \geq 1\}$ と言語 $L_2 = \{a^i b^j c^k : i \geq 1, j \geq 1, j = k\}$ を考えよう。明らかに, L_1 と L_2 は $DCFL$ に属する。それに, $L_1 \cap L_2 \notin CFL$ 。一方, 明らかに $1/2 < \lambda < 1$ を満たす任意の λ に対して, $DCFL \in RPDA(\lambda)$ 補題3.1より, $L_1 \cap L_2 \in BPDA$ となる。よって, $L \notin CFL$ かつ $L \in BPDAL$ となる言語 L が存在する。 ■

【補題3.2】 任意の $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ に対して, $RPDA(\lambda_2) \subset RPDA(\lambda_1) \subset CFL$ 。また $BPDAL \subset PPDAL$ 。

(証明) 定義より明か。 ■

4. $RPDA(\lambda)$ における階層

Σ をアルファベットとする。 $w = b_1 b_2 \cdots b_n$ を Σ 上の語とし, w^R で $b_n \cdots b_2 b_1$ を表し, $|w|$ で w の長さ n を表す。

以下では, $\Sigma = \{0, 1\}$ と固定する。言語 $L = \{\Phi w_1 \# w_2 \$ w_3 \# w_4 \Phi : w_i \in \Sigma^+, 1 \leq i \leq 4, (w_3 = w_1^R \text{ または } w_4 = w_2^R)\}$ について考える。

【補題4.1】 任意の定数 $0 < \lambda < 1/2$ に対して, $L \in RPDA(\lambda)$ 。

(証明) ほとんど自明。 ■

次に $L \notin RPDA(1/2)$ を示す。これを示す前に, まずいくつかの定義と命題を述べる。

【定義4.1】 コルモゴロフの計算量：チューリング機械の標準的枚挙を一つ固定する。チューリング機械 M に対し、 M の Σ 上の符号化を $c(M)$ で表す。文字列 $u, v \in \Sigma^*$ に対して、 v に関する u の条件付きコルモゴロフ計算量 $K(u | v)$ とは、前もって M の一つの作業用テープに v が書かれているとき、 M が入力 x のもとで u を出力するといった M のうちの最短の長さ $|c(M)x|$ のことである。 u のコルモゴロフ計算量 $K(u)$ は $K(u | \epsilon)$ である。

【定義4.2】 ランダムな文字列：文字列 x がランダムであるとは $K(x) \geq |x|$ のときをいう。

【命題4.1】 任意の正整数 n に対して、長さが n であるランダムな文字列は常に存在する。

（証明） Paulらの論文⁽⁹⁾を参照。 ■

【命題4.2】 文字列 uvw がランダムであれば、 $K(v | uw) \geq |v| - O(\log |uvw|)$ 。

（証明） Paulの論文⁽⁸⁾を参照。 ■

【定義4.3】 η をRPDA M への入力とし、 M の入力 η に対する計算を一つ固定する。 $\eta = xwy$ とする。 M の入力ヘッドが η の部分語 w を通過する間にスタックに文字 a を積んだとする。このとき文字 a のことを部分語 w がスタックに積んだ文字と呼ぶ。部分語 w が積んだ文字列のうち、入力ヘッドが w を出た直後に、スタックに残っている文字列を α とし、入力ヘッドが y の間にいるある時点 t で、スタックに残っている部分を α' とすると、 α' は α の前部分語(initial subword)となることに注意する。以下で α のことを部分語 w が積んだ文字列と呼ぶ。 α' のことを w に関する時刻 t でのスタックに残っている文字列と呼ぶ。即ち、 w が積んだ文字列は入力ヘッドが w を出た後、次第にポップされ減少する（完全にポップされたら消える）。

【定義4.4】 $\eta = xw_1yw_2z$ をRPDA M への入力とし、 η に対するある計算を考える。入力ヘッドが w_2 の間にいるあるとき、 M のスタック・ヘッドが部分語 w_1 が積んだ文字の一つを読んだなら、語 w_1 と w_2 は対照(check)されたと言う。

【補題4.2】 $\eta = \Phi w_1 \# w_2 \$ w_3 \# w_4 \Phi$ とし、 L を受理する任意の λ -RPDA ($0 < \lambda < 1$)を M とし、 η を M への入力とする。すると、 M のどんな計算も、 w_1 と w_3 、 w_2 と w_4 を同時に対照することはできない。

（証明） 省略する。 ■

十分に長いランダムな文字列 ξ をとる。命題4.1より $|\xi|$ を偶数と仮定してよい。 ξ を同じ

長さ二等分し, $\xi = w_1 w_2$, $|w_1| = |w_2|$ と書く。 $w_3, w_4, \eta', \eta'', n$ を次のように定める。

$$w_3 = w_1^R, \quad w_4 = w_2^R,$$

$$\eta' = \Phi w_1 \# w_2 \$ w_3 \# w_4 1 \Phi, \quad \eta'' = \Phi w_1 \# w_2 \$ w_3 1 \# w_4 \Phi$$

$$|\eta'| = |\eta''| = n.$$

以下では, η', η'' をこのように固定し, 議論する。また, L を受理する λ -RPDA を M とする。

【補題4.3】(主補題) η' を受理するのに, M は w_1 と w_3 を対照しなければならない。

(証明) M が η' を w_1 と w_3 を対照せずに受理したと仮定し矛盾を導く。 η' を受理する w_1 と w_3 を対照しない計算のうち長さが最短のものを SHORTEST とする。このとき, 次の(*)が成立する。証明方法は Chrobak と Li を参照のこと⁽⁴⁾。

(*) SHORTEST において, 任意の時刻 t に, スタックの長さは $O(n^2)$ である。

計算 SHORTEST に関するいくつかのパラメータを定める: t_1 は入力ヘッドが w_1 を出た時刻, α は部分語 w_1 がスタックに積んだ(時刻 t_1 での)文字列, c は α の長さ, d はスタックの α より下の部分の長さである。 t_0 は α のすぐ下の文字 A がスタックに積まれた時刻である。従って $t_0 < t_1$ 。 t_2 はスタック・ヘッドが α の先頭の文字 B に達した時刻, t_3 は α が完全にポップされた時刻である。仮定より, SHORTEST は w_1 と w_3 とを対照しないので, 時刻 t_2 から t_3 までの間は, M の入力ヘッドは w_3 にいないことに注意する。

時刻 t の表面様相 ID_t を次のように定義する。 $ID_t = (\text{入力ヘッドの位置, 状態, スタックの先頭の文字})$ 。ここで, $ID_{t_0}, ID_{t_1}, ID_{t_2}, ID_{t_3}, c, d$ を使って w_1 を出力するチューリング機械 M' が M から構成できることを示す。最初, M' の入力テープには $x = (ID_{t_0}, ID_{t_1}, ID_{t_2}, ID_{t_3}, c, d)$ があり, 一つの作業用テープに w_2 があるとする。(*)より x の長さは $O(\log n)$ であることに注意する。

$|w_1| = h$ とし, Σ^* の長さ h の各元 u に対し, 次の形の入力 I_u を考える。

$$I_u = \Phi 0^h \# w_2 \$ u \# w_4 1 \Phi$$

M' は, 入力 I_u の下での M の次の条件を満たす計算 COM_u を見つける。

(i) 時刻 t_0' までの計算は M の初期様相からの計算であり, 時刻 t_0' でのスタックの長さは d で, 表面様相は ID_{t_0} と一致する。

(ii) 時刻 t_0' から t_1' までは計算をスキップする。即ちスタックに 0^{c-1} を積み, M の状態, 入力ヘッドの位置, スタックの先頭の文字を ID_{t_1} にセットする。(したがって入力 0^c は読み飛ばされる。)

(iii) 時刻 t_1' から t_2' までは M の計算である。ただし時刻 t_2' でのスタックの長さは $c+d$ で, 表面様相は ID_{t_2} と一致しなければならない。

(iv) 時刻 t_2' から t_3' までは計算をスキップする。即ちスタックから 0^{c-1} を取り除いてスタックの長さを d とし, M の状態, 入力ヘッドの位置を ID_{t_3} にセットする。

(v) 時刻 t_3' からは M の計算である。ただし最後(時刻 t_3' とする)は受理様相でなければならない。

上の条件を満たす計算 COM_u が見つかったなら, u^R を出力して停止する。 $u^R = w_1$ のとき, 条件を満たす計算は存在する(少なくとも SHORTEST がそうである)。従って M' はいずれは停止する。

次に M' が出力する語は w_1 以外にないことを示そう。

今, M' が $u^R \neq w_1$ なる語 u^R を出力したと仮定し矛盾を導く。 $\eta_u = \Phi w_1 \# w_2 \$ u \# w_4 1 \Phi$ とする。 η_u に対する M の計算を SHORTEST と COM_u より次のように構成する。時刻 0 (即ち初期様相) より時刻 t_0' までの計算は COM_u に従う。 t_0' より t_1 までは SHORTEST に従う。 t_1 より t_2' までは COM_u に従う。 t_2' より t_3 までは SHORTEST に従う。 t_3 より t_3' までは COM_u に従う。すると, 仮定より構成した計算は η_u に対する M の受理計算である。従って η_u が M によって受理される確率は 0 ではない。しかし, これは $\eta_u \notin L(w_1 \neq u^R, w_4 1 \neq w_2^R)$ に矛盾する。よって, M' は w_1 を正しく出力する。 M' を符号化し, 得られたものを $c(M')$ とする。明らかに $|c(M')|$ が定数で抑えられる。よって,

$$K(w_1 | w_2) = |c(M')| \log n = O(\log n) = O(\log(|w_1 w_2|)) < |w_1| - O(\log(|w_1 w_2|))$$

命題 4.2 より, これは矛盾であり, よって補題 4.3 が成立する。 ■

[補題 4.4] η'' を受理するのに, M は w_2 と w_4 を対照しなければならない。

(証明) 補題 4.3 とほとんど同じように示せる。 ■

[補題 4.5] $L \notin \text{RPDA}(1/2)$ 。

(証明) まず, $\min(\text{ACCEPT}^M(\eta'), \text{ACCEPT}^M(\eta'')) \leq 1/2$ を示す。入力 $\Phi w_1 \# w_2 \$ w_3$ に対する計

算を考える。 $\Phi w_1 \# w_2 \$ w_3$ は η' と η'' の共通の前部分語であり、入力 $\Phi w_1 \# w_2 \$ w_3$ に対する計算は入力 η' 、入力 η'' の計算の部分計算となることに注意する。入力 $\Phi w_1 \# w_2 \$ w_3$ に対する、 w_1 と w_3 を対照する計算の確率の総和を P_1 とおく。補題4.3より、 $\text{ACCEPT}^M(\eta') \leq P_1$ を得る。一方補題4.2より、入力 η'' に対する計算で w_2 と w_4 を対照するものの確率の総和は $1-P_1$ 以下である。従って補題4.4より、 $\text{ACCEPT}^M(\eta'') \leq 1-P_1$ を得る。 $\text{ACCEPT}^M(\eta') \leq P_1$ と $\text{ACCEPT}^M(\eta'') \leq 1-P_1$ より、 $\text{ACCEPT}^M(\eta'') \leq 1-\text{ACCEPT}^M(\eta')$ 。従って、 $\min(\text{ACCEPT}^M(\eta'), \text{ACCEPT}^M(\eta'')) \leq 1/2$ 。RPDA(λ)の定義より、 $L \in \text{RPDA}(\lambda)$ なら、 $\lambda < 1/2$ 。 ■

[定理4.1] $0 < \lambda < 1/2$ を満たす任意の λ に対して、 $\text{RPDA}(1/2) \not\subseteq \text{RPDA}(\lambda)$ 。

(証明) 補題3.2と補題4.1と補題4.5より明か。 ■

[定理4.2] 任意の整数 $m > 1$ と任意の λ , $0 < \lambda < 1/m$ に対して、 $\text{RPDA}(1/m) \not\subseteq \text{RPDA}(\lambda)$ 。

(証明) $L_m = \{\Phi w_1 \# w_2 \# \dots \# w_m \$ w_{m+1} \# w_{m+2} \# \dots \# w_{2m} \Phi : w_{m+1} = w_1^R \text{ または } w_{m+2} = w_2^R \text{ または } \dots \text{ または } w_{2m} = w_m^R\}$ を考えよう。定理4.1とほとんど同じよう証明できる。 ■

5. 結論

本稿の結果は図1に示されている。

図1で、太線は真に包含されていることを示し、細線は真に包含されるかどうかまだわかっていないことを示す。

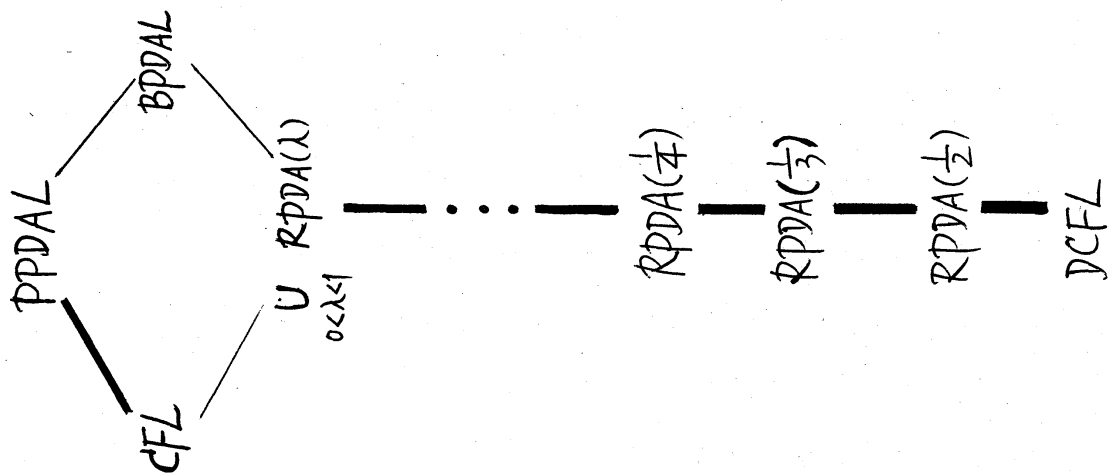


図1

参考文献：

- (1) Angluin, D. and Valiant, L.G.: "Fast Probabilistic Algorithms For Hamiltonian Circuits and Matching", J. Comput. & Syst. Sci., 18, pp. 155-193 (1979).
- (2) Borodin, A. and Cook, S.: "Parallel Computation For Well-Endowed Rings and Space-Bounded Probabilistic Machines", Inf. & Control, 58, pp. 113-136 (1983).
- (3) Chen, K.A. and Hu, M.K.: "A Finite State Probabilistic Automaton that Accepts a Context Sensitive Language that is Not Context Free", Inf. & Control, 35, pp. 196-208 (1977).
- (4) Chrobak, M. and Li, M.: "k+1 Heads are Better Than k for PDA's", Proc. 27th Annual IEEE Symposium on FOCS, pp. 361-367 (1986).
- (5) Gill, J.: "Computational Complexity of Probabilistic Turing Machine", SIAM J. Comput., 6, 4, pp. 675-695 (1977).
- (6) Karp, R.M.: "The probabilistic Analysis of Some Combinatorial Search Algorithms", Algorithms and Complexity, New Direction and Recent Results, J.F. Traub, ed., Academic Press, New York, pp. 1-19 (1976).
- (7) Kasai, T.: "計算量の理論", 近代科学社, 1986.
- (8) Paul, W.: "On-line Simulation of k+1 Tapes by k tapes Require Nonlinear Time", Proc. 23rd Annual IEEE Symposium on FOCS, pp. 53-56 (1982).
- (9) Paul, W. and Seiferas, J. and Simon, J.: "An Information-theoretic Approach to Time Bounds for On-line Computations", Proc. 12th Symposium on Theory of Computing, pp. 357-367 (1980).
- (10) Rabin, M.O.: "Probabilistic Automata", Inf. & Control, 6, pp. 230-245 (1963).
- (11) Rabin, M.O.: "Probabilistic Algorithms", Algorithms and Complexity, New Direction and Recent Results, J.F. Traub, ed., Academic Press, New York, pp. 21-39 (1976).
- (12) Rabin, M.O.: "Probabilistic Algorithms In Finite Fields", SIAM J. Comput., 9, 2, pp.

273-280(May,1980).

- (13) Ruzzo,W.L. and Simon,J. and Tompa,M.: "Space-bounded Hierarchies and Probabilistic Computations", J.Comput.& Syst.Sci.,28,pp.216-230(1984).
- (14) Schwartz,J.T.: "Fast Probabilistic Algorithms For Verification of Polynomial Identities", J.Assoc.Comput.Mach.,Vol.27,No.2,pp.273-280(May,1980).
- (15) Shoning,U.: "Probabilistic Complexity Classes and Lowness", 2nd Annual Structure in Complexity Theory,pp.2-8(1987).
- (16) Solovay,R. and Strassen,V.: "A Fast Monte-Carlo Test For Primality", SIAM J.Comput.,6,pp.84-85(1977).
- (17) Turakainen,P.: "On Stochastic Languages", Inf.&Control,12,pp.304-313(1968).
- (18) Zachos,S.: "Robustness of Probabilistic Computational Complexity Class under Definitional Perturbations", Inf.&Control,54,pp.143-154(1982).
- (19) Zachos,S. and Heller,H.: "A Decisive Characterization of BPP", Inf.&Control,69, pp.125-135(1986).
- (20) Zachos,S.: "Probabilistic Quantifiers,Adversaries,and Complexity Classes", 1st Annual Structure in Complexity Theory,pp.383-400(1986).